Optimale Überdeckungstouren

Matthias Nieuwenhuisen

Uni Bonn

03.07.2007

Überblick

- Motivation

Überblick

- Motivation
- NP-Vollständigkeit

Überblick

- Motivation
- NP-Vollständigkeit
- Approximationen
  - Gitterpolygone
  - rechtwinklige Polygone

Überblick

- Motivation
- NP-Vollständigkeit
- Approximationen
  - Gitterpolygone
  - rechtwinklige Polygone
- Hilfsmittel

Motivation

- Robotik
  - Rasen mähen
  - Saugen
  - Überwachung
  - ...
- Fertigungstechnik
  - Fräsen
  - Schneiden
  - Löten
  - ...
- ...

Definition

Definition

Überdeckungstour T in Polygon P: Pfad, dessen Minkowskisumme mit Cutter P ergibt.
Turnkostenoptimale Überdeckungstour minimiert Anzahl der Drehungen des Cutters.

Definition

Zyklusüberdeckung C eines Polygons P: Menge von geschlossenen Pfaden.
Minkowskisumme des Cutters mit Vereinigung dieser Pfade ergibt P.
Optimale Zyklusüberdeckung minimiert die Summe der Turns der in C enthaltenen Zyklen.

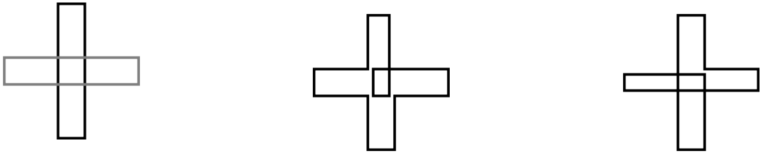
NP-Vollständigkeit

Theorem

Das Finden einer pfadlängen- oder turnkostenoptimalen Überdeckungstour ist NP-Vollständig.

Theorem

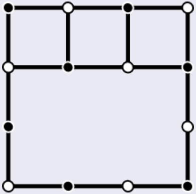
Das Finden einer turnkostenoptimalen Überdeckungstour ist NP-Vollständig, auch wenn bereits eine optimale Zyklusüberdeckung gegeben ist.



Definitionen - Gittergraph und Hamiltonkreis

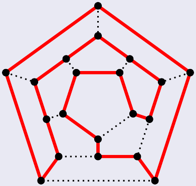
Definition

Gittergraph: ungerichteter Graph, Knoten liegen auf ganzzahligen Koordinaten, jede Kante hat Länge 1.



Definition

Hamiltonkreis: geschlossener Weg durch einen Graphen, der jeden Knoten genau einmal besucht.



NP-Vollständigkeit

Theorem

Das Finden einer turnkostenoptimalen Überdeckungstour ist NP-Vollständig, auch wenn bereits eine optimale Zyklusüberdeckung gegeben ist.

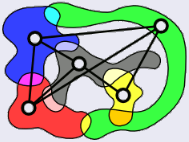
Beweisidee: Reduziere Finden eines Hamiltonkreises in einem Gittergraphen auf das Finden einer Überdeckungstour. Für das erste Problem ist die NP-Vollständigkeit bekannt.

- Reduziere das Finden eines Hamiltonkreises im Gittergraphen auf HUSIG
- Reduziere HUSIG auf das Finden einer Überdeckungstour

NP-Vollständigkeit

Definition

Zu einer Menge M von Mengen $m \in M$ korrespondiert ein Schnittgraph $G = (V, E)$ mit Knoten $V(m)$ zu jedem m und Kanten $(V(m_1), V(m_2))$ genau dann, wenn $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$.



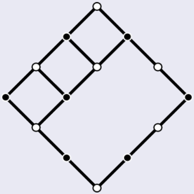
Theorem

Das Finden eines Hamiltonkreises in einem Schnittgraphen zu achsenparallelen Liniensegmenten in Einheitslänge (HUSIG - Hamiltonicity In Unit Segment Intersection Graphs) ist mindestens so schwer wie das Finden eines Hamiltonkreises in einem Gittergraphen.

NP-Vollständigkeit

Beweis

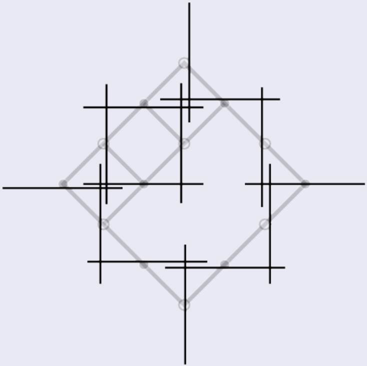
Zu einem Gittergraphen G ist eine Menge konstruierbar, deren Schnittgraph S äquivalent zum Gittergraphen G ist.



- Färbe G bipartit ein.
- Rotiere G um $\frac{\pi}{4}$ und skaliere um $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Beweis Fortsetzung

- Verrausche die Knoten von G um ϵ
- Weiße Knoten: Mittelpunkt eines vertikalen, schwarze Knoten eines horizontalen Liniensegmentes mit Länge 1

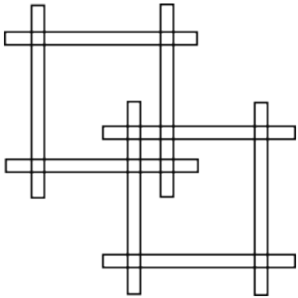


Der zu dieser Menge von Liniensegmenten korrespondierende Schnittgraph ist genau G.

Theorem

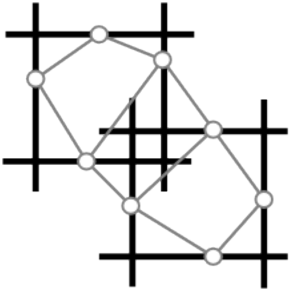
Das Finden einer turnkostenoptimalen Überdeckungstour ist mindestens so schwer wie HUSIG.

- Konstruiere aus einer Menge von s Linensegmenten ein Polygon mit $4s$ konvexen Ecken.
- Überdecke jedes dieser konstruierten Rechtecke mit einem Zyklus.
- Dieser hat pro Rechteck 4 Turns. Die Gesamtüberdeckung ist turnkostenoptimal.



NP-Vollständigkeit

- Wenn ein Hamiltonkreis im Schnittgraphen existiert, dann gibt dieser eine Reihenfolge vor, die jedes Rechteck genau einmal enthält.
- Folge dieser Reihenfolge um eine Überdeckungstour mit $5s$ Turns zu erzeugen.
- Diese Tour ist ebenfalls turnkostenoptimal.



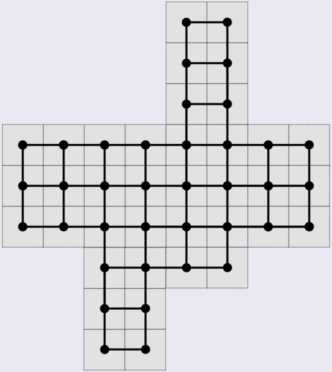
Folgerung

Aus einer turnkostenoptimalen Überdeckungstour kann direkt ein Hamiltonkreis im Schnittgraphen abgelesen werden.

Gitterpolygon

Definition

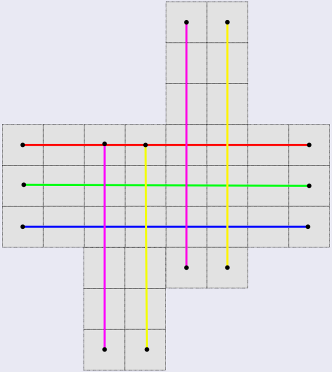
- Ein Gitterpolygon ist ein rechtwinkliges Polygon.
- Ein Cutter kann sich nur achsenparallel bewegen
- und nur an diskreten Punkten abbiegen.
- Ein 90° Turn verursacht Kosten von 1, eine Wende Kosten von 2



Streifenüberdeckung

Definition

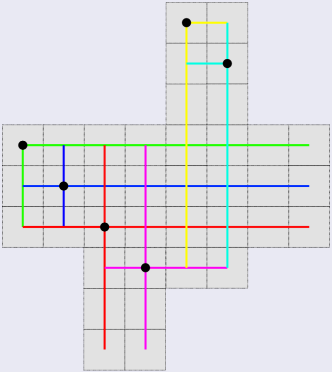
- Streifen: Linie maximaler Länge, deren Minkowskisumme mit Cutter innerhalb des Polygons liegt.
- Streifenüberdeckung: Vereinigung von Streifen, deren Minkowskisumme mit dem Cutter genau das Polygon ergibt.



Turmplatzierung

Definition

- Turm: Verbindungspunkt zweier orthogonaler Streifen, kann alle Punkte auf diesen Streifen “angreifen”.
- Turmplatzierung: Platzierung von Türmen in einem Gitterpolygon, die sich paarweise nicht angreifen können.



Gitterpolygone

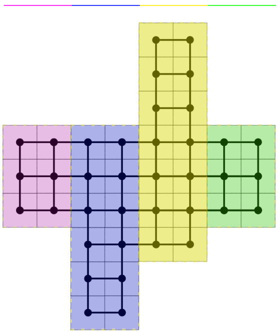
Theorem

Für ein Gitterpolygon lässt sich in $O(n \log n)$ eine Überdeckungstour finden, die eine 12-Approximation für die Turnkosten und eine 4-Approximation der Länge ist. Für ein einfaches Gitterpolygon verbessert sich die Zeit auf $O(n)$.

Diese Approximation ist unabhängig von der Größe des Gitterpolygons und hängt nur von der Komplexität des Polygons ab. Sie eignet sich daher besonders für Polygone bei denen N erheblich größer ist als n.

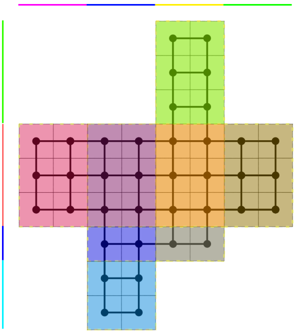
Gitterpolygone

- Zuerst wird das Gitterpolygon in rechteckige Bereiche aufgeteilt.
- Diese Bereiche entstehen, in dem von jedem Randpunkt eine Linie zur gegenüberliegenden Seite eingefügt wird.
- Die Bereiche entsprechen den Sichtregionen des Polygon. Sichtregionen können genau in der geforderten Zeit berechnet werden.



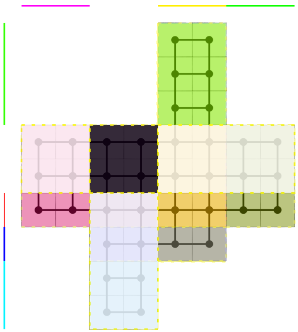
Gitterpolygone

- Zuerst wird das Gitterpolygon in rechteckige Bereiche aufgeteilt.
- Diese Bereiche entstehen, in dem von jedem Randpunkt eine Linie zur gegenüberliegenden Seite eingefügt wird.
- Die Bereiche entsprechen den Sichtregionen des Polygon. Sichtregionen können genau in der geforderten Zeit berechnet werden.



Gitterpolygone

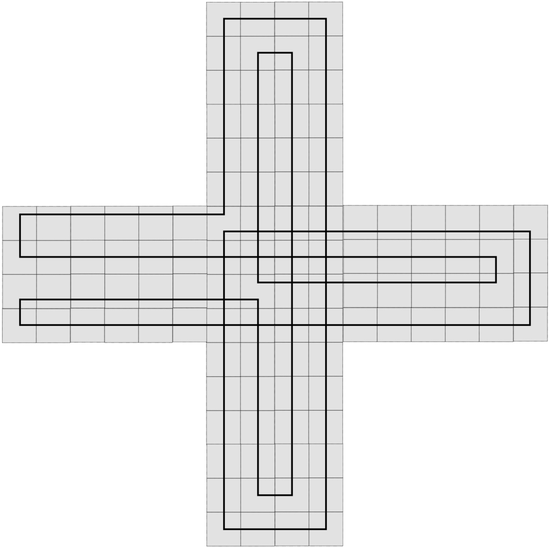
- Füge greedy einen "großen Turm" in einen leeren Bereich ein. Dieser füllt den Bereich entweder in Höhe oder Breite voll aus.
- Verkleinere beide Streifen um die Ausdehnung des Turms, da diese Teile der Streifen angreifbare Zellen enthalten.
- Einer der Streifen verschwindet, damit auch alle Bereiche zu denen er einen Beitrag geleistet hat.
- Nach $(2n-1)$-maligem Durchführen dieser Schritte ist das gesamte Polygon mit Streifen überdeckt.



Gitterpolygone

- Eine Platzierung großer Türme lässt sich nach Vorverarbeitung in $O(n)$ durchführen.
- Die explizite Betrachtung der enthaltenen kleinen Türme ist zeitlich nicht möglich.
- $\Rightarrow$ implizite Vorschrift für das Durchlaufen des großen Turms nötig.

Überdeckung eines großen Turmes



Gitterpolygone

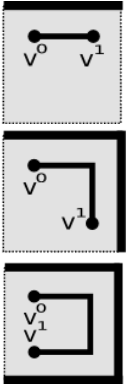
- Eine Turmplatzierung ist eine untere Schranke für die Zahl der Turns einer Überdeckungstour.
- Jeder Turm deckt einen Zyklus mit 10 Turns ab $\Rightarrow$ Eine Überdeckungstour hat $10\,\text{OPT} + 2\,(\text{OPT} - 1) \leq 12\,\text{OPT}$ Turns.
- Jeder Turm wird genau 4 mal überdeckt, jede andere Zelle von maximal 2 Streifen. Jeder Streifen wird 2 mal vom Cutter durchlaufen. Jede Zelle wird also maximal 4 mal überdeckt und für die Pfadlänge l der Tour gilt $l \leq 4\,\text{OPT}$

Das gezeigte Ergebnis lässt sich mit mehr Zeitaufwand verbessern. Hierbei spielt die Größe des Polygons jedoch eine Rolle.

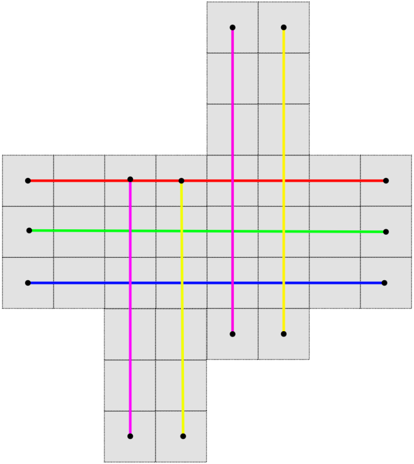
Theorem

In Zeit $O\left(N^{2,376} + n^3\right)$ bzw. $O\left(n^{2,5}\log N + n^3\right)$ lässt sich eine 3,75-Approximation einer optimalen Überdeckungtour in einem Gitterpolygon finden.

- optimale Randüberdeckung: optimale Zyklusüberdeckung, die jede Randzelle eines Polygons enthält, jedoch nicht notwendigerweise nur Randzellen.
- Randzellen beinhalten einen eingebetteten Pfad, dieser gibt die minimalen Turns an, die der Cutter benötigt um diese Zelle zu betreten und wieder zu verlassen.
- Zwischen Randzellen existieren sog. optionale Pfade, diese können auch durch das Polygon verlaufen und geben an, wie viele Turns ein Cutter benötigt um von einer Randzelle zu einer anderen zu gelangen.



- Finde eine minimale Streifenüberdeckung (geht durch Matching in bipartiten Graphen in der geforderten Zeit).
- Endpunkte der Streifen liegen durch die maximale Länge in Randzellen des Polygons.



Gitterpolygone

- Eine Tour muss an den Endpunkten orthogonal auf den eingebetteten Pfad der Randzelle abknicken.
- $\Rightarrow$ Finde eine Randüberdeckung für die Zellen in denen die Endpunkte der Streifen liegen.
- Teile die Randüberdeckung M in zwei Mengen M_1, M_2 auf, da jede Randzelle entweder betreten ODER verlassen wird.
- Da M eine optimale Randüberdeckung ist, enthält M höchstens soviele Turns wie eine optimale Zyklusüberdeckung des Polygons. Entweder M_1 oder M_2 hat somit höchstens halb soviele Turns wie eine optimale Zyklusüberdeckung.

Gitterpolygone

- Zu den Turns der Randüberdeckung kommen noch die Turns von den eingebetteten Pfaden in die Streifen.
- Insgesamt entsteht so eine Zyklusüberdeckung mit $2,5$ OPT Turns.
- Man kann aus dieser Zyklusüberdeckung eine Überdeckungstour mit $3,75$ OPT Turns erstellen.
- Streifenüberdeckung mit breiten Streifen kann in $O\left(N^{2,376}\right)$ bzw. $O\left(n^{2,5}\log N\right)$ gefunden werden.
- Die Randüberdeckung kann in $O\left(n^3\right)$ gefunden werden.

Pfadlänge

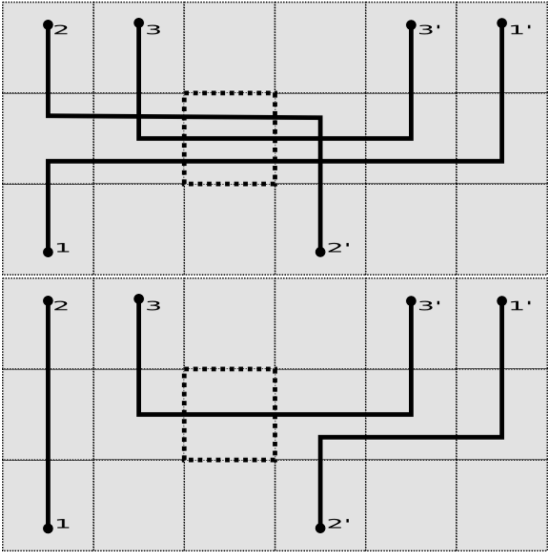
Theorem

Jede gegebene Überdeckungstour in einem Gitterpolygon lässt sich lokal so modifizieren, dass diese Tour eine 4-Approximation der Länge einer optimalen Tour ist, ohne die Turnkosten zu erhöhen.

Beweis

- In einer Zelle mit Überdeckungsgrad größer 4 verlaufen in einer Richtung mindestens 3 Pfade durch die Zelle.
- Verbinde diese Pfade neu, um den Überdeckungsgrad zu vermindern.
- Beachte, dass keine Zyklen zerfallen.

Pfadlänge



rechtwinklige Polygone

Theorem

In einem rechtwinkligen Polygon kann eine 6,25-Approximation der Turnkosten und 8-Approximation der Länge eine Überdeckungstour in Zeit $O\left(n^{2,5}\log N + n^3\right)$ *gefunden werden.*

Beweis

- Bette ein Gitterpolygon in das zu überdeckende Polygon ein und überdecke dieses wie eben gezeigt.
- Nun sind nur noch schmale Bereiche am Rand nicht überdeckt.

rechtwinklige Polygone

Beweis Fortsetzung

- Suche eine Randüberdeckung, diese überdeckt alle Randbereiche bis auf reflexe Ecken.
- Reflexe Ecken können durch Verlängerung eines angrenzenden Zyklus besucht werden.
- Die Randzyklen können mit Kosten $\frac{\mathrm{OPT}}{2}$ verbunden werden.
- Die Randtour und die Überdeckung des eingebetteten Polygons lassen sich zu einer Tour mit $6,25$ OPT Turns verbinden.
- Beide Touren sind jeweils eine 4 Approximation der Länge, zusammen also eine 8-Approximation.

Hilfsmittel

- Um die Güte der Approximationen abzuschätzen, werden einige Hilfsmittel benötigt.
  - Kostenabschätzung beim Verbinden von Zyklen
  - Überdeckung eines Polygons mit Streifen
  - Überdeckungstour für den Rand eines Polygons

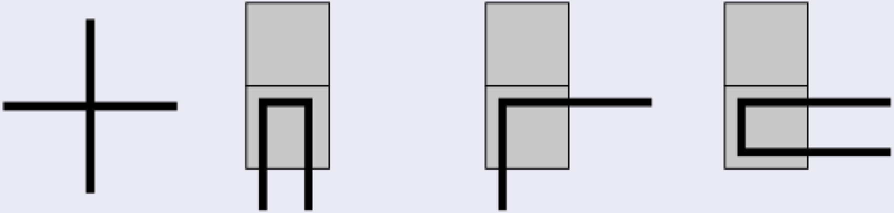
Verbinden von Zyklen

Lemma

Eine Überdeckung eines Polygons mit c Zyklen und t Turns lässt sich zu einer Überdeckungstour mit maximal $t + 2(c - 1)$ Turns verbinden.

Beweis

- Kreuzende Zyklen lassen sich mit 2 extra Turns verbinden
- Berührende Zyklen lassen sich mit 2 extra Turns verbinden



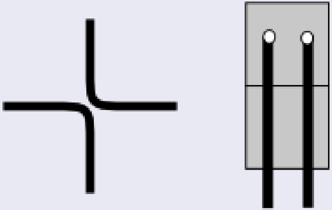
Verbinden von Zyklen

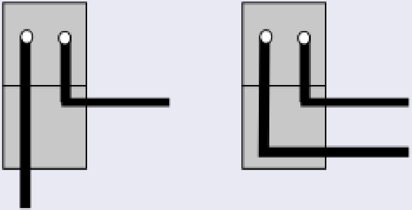
Lemma

Eine Überdeckung eines Polygons mit c Zyklen und t Turns lässt sich zu einer Überdeckungstour mit maximal $t + 2\,(c - 1)$ Turns verbinden.

Beweis

- Kreuzende Zyklen lassen sich mit 2 extra Turns verbinden
- Berührende Zyklen lassen sich mit 2 extra Turns verbinden





Beweis Fortsetzung

- Die Gesamtkosten folgen durch Induktion über die Zyklen.
- Anfang: Für einen Zyklus folgt $t + 2\,(c-1) = t$.
- Annahme: $(c-1)$ Zyklen sind zu einer Tour mit $t' + 2\,(c-2)$ Turns verbunden.
- Neuer Zyklus hat r Turns und lässt sich mit 2 Turns an die Tour anbinden.
- $t' + r + 2\,(c-2) + 2 = t + 2c - 4 + 2 = t + 2\,(c-1)$.

Korollar

Eine Zyklusüberdeckung in einem einfachen, rechtwinkligen Polygon mit t Turns lässt sich zu einer Überdeckungstour mit $1,5t$ Turns verbinden.

Lemma

Eine minimale Streifenüberdeckung ist eine untere Schranke für die Anzahl der Turns in einer Überdeckungstour.

Beweis

- Jede Kante einer Überdeckungstour lässt sich zu einem Streifen verlängern.
- Die Anzahl der Kanten einer Überdeckungstour ist genau die Anzahl der Turns.
- Da jetzt das ganze Polygon mit Streifen überdeckt ist, kann eine minimale Streifenüberdeckung nicht größer sein

Turmplatzierung

Lemma

Eine maximale Turmplatzierung ist eine untere Schranke für die Anzahl der Turns in einer Überdeckungstour.

Beweis

- Annahme: Überdeckungtour mit weniger Turns als Türmen
- Die Tour muss jeden Turm überdecken
- Aus der Annahme folgt, dass mindestens zwei Türme ohne Abbiegen der Tour erreichbar sind
- Es gibt einen Streifen der die Türme verbindet und somit könnten sich die Türme angreifen. Widerspruch!

Streifenüberdeckung und Turmplatzierung

Theorem

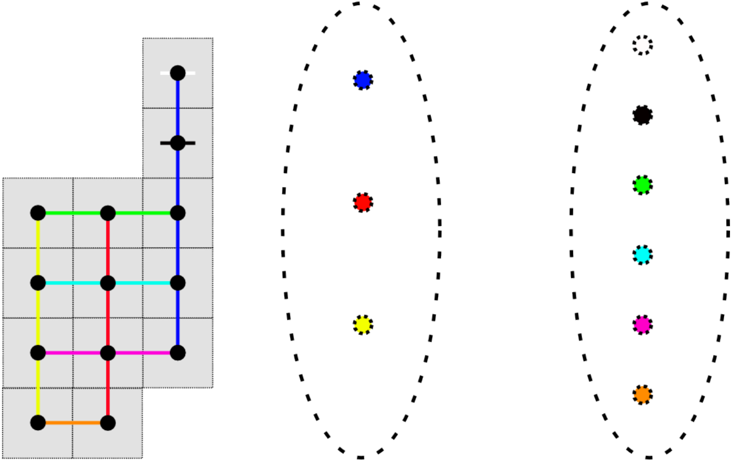
In Gitterpolygonen ist eine optimale Streifenüberdeckung gleichmächtig mit einer maximalen Turmplatzierung und beides kann in Zeit $O\left(N^{2,376}\right)$ *bzw.* $O\left(n^{2,5}\log N\right)$ *berechnet werden.*

Beweis

- Führe Suche einer Streifenüberdeckung auf minimale Knotenüberdeckung zurück
- Führe Suche einer Turmplatzierung auf minimales Matching zurück
- Das König-Egerváry-Theorem beweist, dass beide Probleme in bipartiten Graphen gleichmächtig sind
- Es lässt sich zeigen, dass diese graphentheoretischen Probleme in der geforderten Zeit berechenbar sind

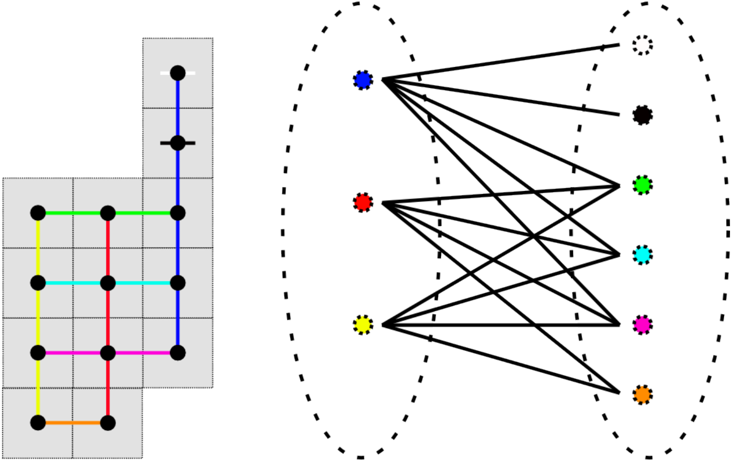
Streifenüberdeckung als Knotenüberdeckung

1. Erstelle für jeden möglichen Streifen einen Knoten im Graphen. Durch Aufteilung der Knoten in vertikal und horizontal ist der Graph bipartit.



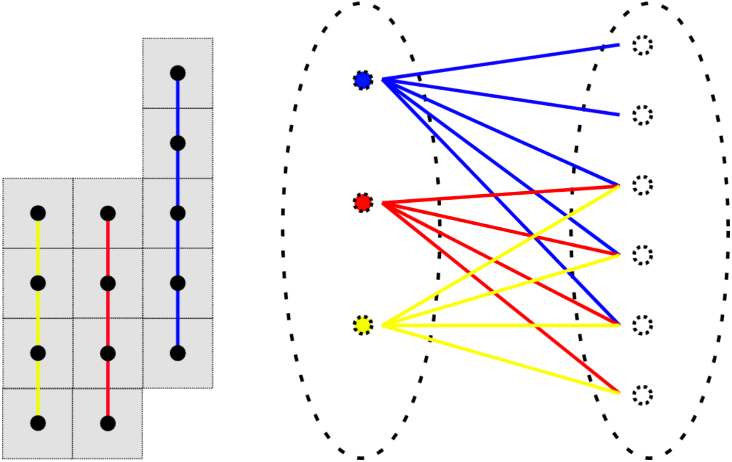
Streifenüberdeckung als Knotenüberdeckung

2. Verbinde zu kreuzenden Streifen korrespondierende Knoten mit Kanten. Diese Kanten entsprechen genau den Gitterpunkten.



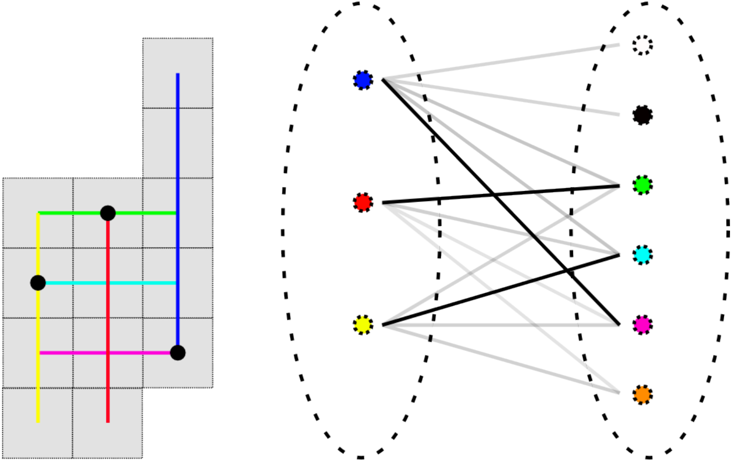
Streifenüberdeckung als Knotenüberdeckung

3. Suche eine minimale Knotenüberdeckung und füge zu markierten Knoten korrespondierende Streifen der Überdeckung hinzu.



Turmplatzierung als Matching

1. & 2. wie eben, 3. Suche ein maximales Matching und füge zu markierten Kanten korrespondierende Türme der Platzierung hinzu.



Randüberdeckungen

Lemma

Eine optimale Randüberdeckung zu N Randzellen kann in $O\left(N^3\right)$ berechnet werden.

Beweis

- Füge für jede Zelle beide Endpunkte des eingebetteten Pfades als Knoten in einen Graphen ein
- Füge für jeden Knoten den Abstand zu jedem anderen Knoten als gewichtete Kante in den Graphen ein. Dies geht mit Dijkstra ähnlichem Algorithmus im Gitterpolygon in $O\left(N^2 \log N\right)$ für alle Zellen.
- Bestimme ein Matching minimalen Gewichts in $O\left(N^3\right)$ und verbinde die optionalen und eingebetteten Pfade zu Zyklen.

Zusammenfassung

- optimale Überdeckungstouren zu finden ist NP-Vollständig.
- Approximationen für bestimmte Polygonklassen sind effizient zu berechnen.
- Durch implizit kodierte Überdeckungstouren können Überdeckungstouren unabhängig von der Größe eine Polygons berechnet werden.
- Für Gitterpolygone kann eine $3,75$-Approximation in $O\left(n^{2,5}\log N + n^3\right)$ gefunden werden.
- Für allgemeine rechtwinklige Polygone kann in der selben Zeit eine $6,25$-Approximation gefunden werden.

Literatur

Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Sándor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Saurabh Sethia.
Optimal covering tours with turn costs.
SIAM Journal on Computing, 35(3):531–566, 2005.

B. Chazelle.
Triangulating a simple polygon in linear time.
Disc. and Comp. Geometry, 6:485–524, 1991.

Marcin Mucha and Piotr Sankowski.
Maximum matchings via gaussian elimination.
In *FOCS '04: Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'04)*, pages 248–255, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.