

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Matthias Nieuwenhuisen

**Optimale
Überdeckungstouren**

03.07.2007

Seminararbeit im SS 2007

Zusammenfassung

In dieser Seminararbeit stelle ich Möglichkeiten vor, Überdeckungstouren in polygonalen Szenen zu finden. Bei diesen Touren ist das Ziel, ein vorhandenes Überdeckungswerkzeug möglichst selten wenden zu lassen. Ich werde zeigen, dass die Minimierung der Kosten einer derartigen Tour NP-Vollständig ist und dass selbst das Finden einer Approximation schwerer ist, als im Falle der Minimierung der Länge einer solchen Tour. Ich werde einige Approximationen für Polygone mit eingeschränkter Struktur vorstellen und deren Laufzeiten sowie Approximationsgüten abschätzen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Definitionen	3
3	NP-Vollständigkeit	3
3.1	HUSIG ist NP-Vollständig	4
3.2	Reduktion von HUSIG auf Überdeckungstouren	5
4	Approximationen	7
4.1	Hilfsmittel	8
4.1.1	Verbinden von Zyklen	8
4.1.2	Streifenüberdeckungen	10
4.1.3	Randüberdeckungen	13
4.2	Überdeckungstouren in Gitterpolygonen	14
4.3	Überdeckungstouren in rechtwinkligen Polygonen	19
5	Zusammenfassung	20

1 Einführung

In vielen Anwendungen ist es nötig einen bestimmten Bereich komplett mit einem Werkzeug zu überdecken. Zum Beispiel offensichtlich beim Rasen mähen oder Fräsen von Werkstücken, aber auch beim Suchen oder Kartographieren einer nur in Umrissen bekannten Region tritt dieses Problem auf.

Häufig lässt sich dieses Problem auf polygonale Szenen einschränken, wie einfache Umrisse eines oder mehrerer Räume oder die abzufräsenden Kanten bei einem Werkstück. In diesem Falle ist eine Überdeckungstour eines Polygons, das die Szene beschreibt, ein Pfad, dessen Minkowskisumme mit einem polygonalem Werkzeug (im Folgenden Cutter genannt) genau das zu überdeckende Polygon ergibt.

Bei der Suche nach einer optimalen Tour für einen Cutter gibt es insbesondere zwei zu optimierende Größen. Einerseits sucht man eine möglichst kurze Tour, die den Bereich vollständig überdeckt, andererseits eine mit möglichst wenigen Wendemanövern (im Folgenden Turn genannt). Je nach Anwendung ist es nötig diese Optimierungen passend zu gewichten, so sind zum Beispiel bei einem runden Roboter, der sich schnell drehen kann die Turnkosten zu vernachlässigen, jedoch ist auf Grund der meist geringen Geschwindigkeit die Länge der Tour ausschlaggebend für die Dauer des Abfahrens der Szene. Andererseits sind auch Fälle vorstellbar, wo man ein sehr schnelles Werkzeug hat, das jedoch eventuell durch abbremsen und wieder beschleunigen und lange Wendezeiten hauptsächlich durch die Anzahl der Turns in der Leistungsfähigkeit beschränkt ist.

Die beiden Optimierungsprobleme sind jedes für sich genommen bereits NP-Vollständig, darum ist es bei beiden nötig Approximationen anzugeben. Hierbei kann man ausnutzen, dass viele Anwendungsfälle mit eventuell stark eingeschränkten Freiheiten bei der Gestaltung der polygonalen Szene auskommen, wie Polygonen mit ausschließlich rechtwinkligen Ecken.

In diesem Seminar werde ich mich auf den Fall der Optimierung der Turnkosten beschränken. Im ersten Teil werde ich zeigen, dass die Optimierung selbst mit einer gegebenen Menge von Teilüberdeckungen, die insgesamt minimale Turnkosten haben, noch NP-Vollständig ist. Im zweiten Teil werde ich einige Hilfsmittel vorstellen, die für die Konstruktion von Überdeckungstouren und die Abschätzung der Güte dieser, bei den im dritten Teil vorgestellten Approximationsalgorithmen, benötigt werden.

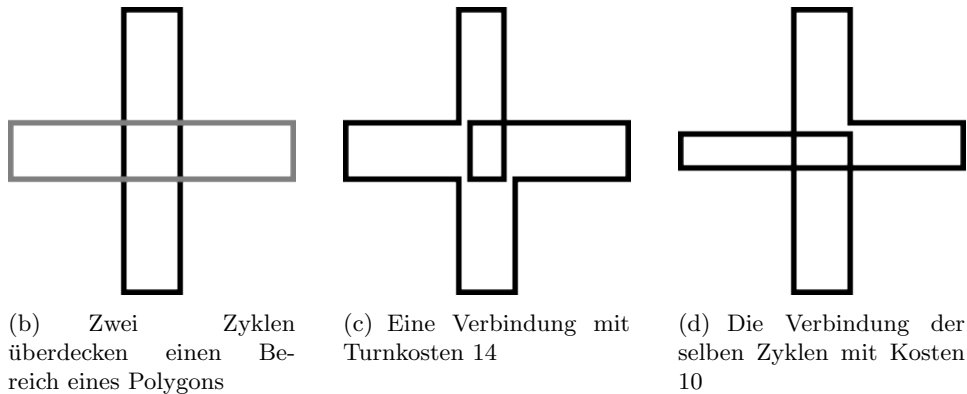


Abbildung 1: Die Verbindung zweier Zyklen kann zu unterschiedlichen Turnkosten führen.

lösen, da alleine die Verbindung zweier Zyklen schon mehrere Lösungen mit unterschiedlichen Turnkosten hat (Abbildung 1).

Im Folgenden werde ich darstellen, dass bereits dieses Teilproblem NP-hart ist. Dies gilt auch unter den Einschränkungen, dass das Polygon nur orthogonale Kanten hat und zwischen diesen Kanten maximal eine Zelle Freifläche existiert (dünnes orthogonales Polygon). Der Beweis der Komplexität basiert auf der Reduktion des Problems zu entscheiden, ob ein Gittergraph einen Hamiltonkreis enthält, das heißt einen Kreis, der jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält. Für dieses Problem ist bekannt, dass es NP-Vollständig ist.

Theorem 3 *Das Finden einer in den Turnkosten optimalen Überdeckungstour ist NP-Vollständig, auch wenn man sich auf dünne Gitterpolygone beschränkt und eine optimale Zyklusüberdeckung gegeben ist.*

3.1 HUSIG ist NP-Vollständig

Für die Reduktion des Hamiltonkreisproblems auf das Finden einer Überdeckungstour wird als Hilfsmittel die Komplexität des Problems des Findens eines Hamiltonkreises in einem Schnittgraph ausgenutzt. Ein Schnittgraph ist ein Graph, in dem die Knoten Mengen darstellen und eine Kante zwischen zwei Knoten genau dann eingefügt wird, wenn der Schnitt der zu den Knoten korrespondierenden Mengen nicht leer ist (Abbildung 3.1).

Lemma 4 *Das Problem zu entscheiden ob, ein Schnittgraph zu achsenparallelen Segmenten mit Einheitslänge hamiltonsch ist (HUSIG - Hamiltonicity of Unit Segment Intersection Graphs), ist mindestens so komplex wie die Entscheidung ob ein Gittergraph hamiltonsch ist.*

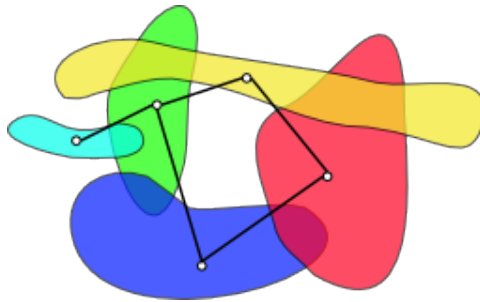


Abbildung 2: Ein Schnittgraph und korrespondierende Mengen

Beweis. Zum Beweis des Lemmas wird die Eigenschaft ausgenutzt, dass sich jeder Gittergraph äquivalent als Schnittgraph repräsentieren lässt. Zur Konstruktion der korrespondierenden Menge aus achsenparallelen Segmenten mit Einheitslänge ist es nötig, den Gittergraph bipartit zu färben. Dies ist in Linearzeit möglich, da als Kriterium für die Farbe die Betrachtung reicht, ob für einen Knoten an der Stelle (x, y) die Summe $x + y$ gerade oder ungerade ist.

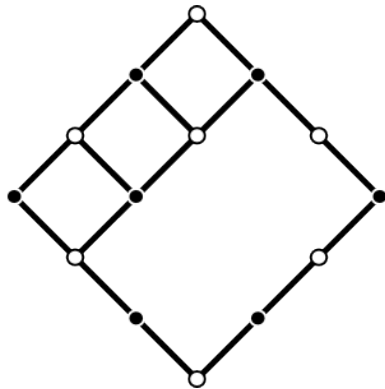
Nun wird der Gittergraph um $\frac{\pi}{4}$ rotiert und um $\frac{3}{\sqrt{2}}$ skaliert. Dadurch liegen alle Gitterpunkte auf Vielfachen von $\frac{1}{3}$, auf einer achsenparallelen Linie liegen jeweils nur Knoten gleicher Farbe und diese haben einen minimalen Abstand von $\frac{2}{3}$ (Abbildung 3a).

Im nächsten Konstruktionsschritt werden alle Gitterpunkte vertauscht. Man bekommt eine neue Punktmenge, bestehend aus Punkten $p'_i = p_i + (\epsilon_i, \epsilon_i)$. Jeder dieser Punkte wird Mittelpunkt eines Liniensegmentes mit Einheitslänge, weiße Punkte bekommen vertikale Segmente, schwarze Punkte horizontale Segmente. Aus dem Abstand und der Lage der Gitterpunkte ergibt sich, dass ein Segment pro Seite maximal zwei andere Segmente schneidet. Der Schnittgraph zu der so konstruierten Menge von Liniensegmenten ist nun genau der anfängliche Gittergraph und somit ergibt sich die Behauptung (Abbildung 3b). \square

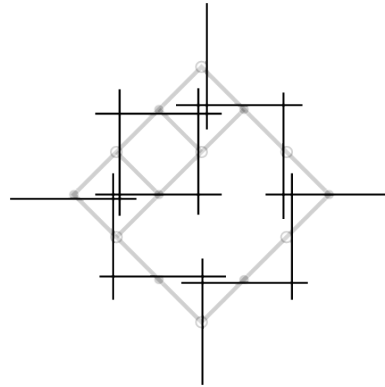
3.2 Reduktion von HUSIG auf Überdeckungstouren

Nun werde ich HUSIG auf das Finden einer Überdeckungstour reduzieren, indem aus einer Menge von Liniensegmenten ein Polygon konstruiert wird. In diesem Polygon lässt sich danach eine optimale Überdeckungstour berechnen und aus dieser kann direkt ein Hamiltonkreis abgelesen werden.

Lemma 5 *Das Finden einer optimalen Überdeckungstour ist mindestens so schwer wie das Finden eines Hamiltonkreises im Schnittgraph einer Menge*



(a) Ein gefärbter, gedrehter, skalierter Gittergraph



(b) Die konstruierten Liniensegmente und der zugehörige Schnittgraph

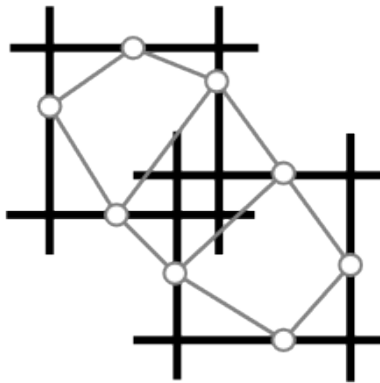
Abbildung 3: Ein Gittergraph lässt sich äquivalent als Schnittgraph einer Menge von achsenparallelen Liniensegmenten mit Einheitslänge repräsentieren

von achsenparallelen Liniensegmenten mit Einheitslänge.

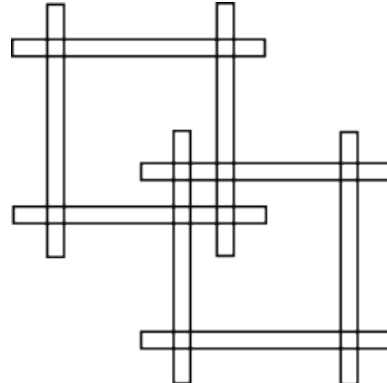
Beweis. Gegeben ist eine Menge von achsenparallelen Liniensegmenten in Einheitslänge. Zu dieser Menge korrespondiert ein Schnittgraph, der einen Hamiltonkreis enthalten kann (Abbildung 4a). Aus den Liniensegmenten lässt sich ein Polygon konstruieren, indem jedes Segment durch vier Korridore ersetzt wird. Diese Korridore sind rechtwinklig zueinander und eine Zelle breit. Es entsteht so aus den s Liniensegmenten ein Polygon mit $4s$ konvexen Ecken (Abbildung 4b).

Eine optimale Zyklusüberdeckung eines Korridorrechtecks führt offensichtlich zu einem Zyklus mit Turnkosten von vier. Wenn nun für jedes Korridorrechteck ein derartiger Pfad mit optimalen Turnkosten erstellt wird bekommt man für das Polygon als Gesamtes eine optimale Zyklusüberdeckung.

Angenommen im Schnittgraph gibt es einen Hamiltonkreis, dann lässt sich dieser benutzen um aus der Zyklusüberdeckung eine optimale Überdeckungstour zu konstruieren. In diesem Fall findet ein Wechsel immer zwischen im Hamiltonkreis benachbarten Korridorrechtecken statt. Durch die Hamiltoneneigenschaft ist sichergestellt, dass jedes Korridorrechteck genau einmal durchlaufen wird. Somit ergeben sich für eine Überdeckungstour Gesamtkosten von $4s + s = 5s$, da $4s$ Turns benötigt werden um die konvexen Ecken zu durchlaufen sowie s mal das Korridorrechteck mit einem Turn gewechselt wird.



(a) Eine Menge von Liniensegmenten und der korrespondierende Schnittgraph



(b) Die Liniensegmente lassen sich zu einem Polygon mit $4s$ Korridoren verbinden

Abbildung 4: Aus achsenparallelen Liniensegmenten mit Einheitslänge lässt sich ein Polygon konstruieren mit dem sich HUSIG durch eine Überdeckungstour lösen lässt.

Für den Beweis wird nun umgekehrt angenommen, es sei eine Überdeckungstour mit Kosten von $5s$ gegeben. Hiervon sind wieder $4s$ die Kosten, die notwendigerweise durch die konvexen Ecken anfallen. Es bleiben also noch s Turns übrig. Da jeder Wechsel zwischen Korridorrechtecken genau Kosten von 1 verursacht sind die Kosten für alle Wechsel zusammen genau dann s , wenn jedes Korridorrechteck genau einmal besucht wird. Da jedes Korridorrechteck zu einem Liniensegment korrespondiert, und dieses wiederum zu einem Knoten im Schnittgraphen, entspricht eine solche Überdeckungstour genau dem Verfolgen eines Hamiltonkreises im Schnittgraphen.

Somit lässt sich HUSIG durch die Konstruktion einer optimalen Überdeckungstour lösen und die Behauptung ist gezeigt. \square

Daraus ergibt sich nun der Beweis für Theorem 3

Beweis. Aus Lemma 5 und Lemma 4 ergibt sich die NP-Vollständigkeit der Konstruktion einer optimalen Überdeckungstour aus einer gegebenen optimalen Zyklusüberdeckung eines Polygons. \square

4 Approximationen

Durch die NP-Vollständigkeit ist es meistens nicht möglich, eine optimale Überdeckungstour mit minimalen Turnkosten effizient zu berechnen. Daher sind Approximationsalgorithmen von besonderem Interesse. Wie gezeigt ist das Problem selbst bei Polygonen mit starken Einschränkungen noch NP-Vollständig, insbesondere in solchen Problem instanzen lassen sich jedoch

teilweise sehr effizient approximative Lösungen berechnen. Im Folgenden werde ich einige approximative Lösungen für derartige Polygone angeben.

4.1 Hilfsmittel

Für die dargestellten Approximationsalgorithmen werden einige Beweishilfsmittel benötigt, um beispielsweise aus Zyklusüberdeckungen eine Überdeckungstour zu konstruieren und um optimale Überdeckungen zu finden.

4.1.1 Verbinden von Zyklen

Viele der Approximationen basieren darauf, erst eine gute Zyklusüberdeckung zu finden und dann zu einer Überdeckungstour zu verbinden. Wie in Theorem 3 gezeigt ist dieser Schritt für eine optimale Tour schwer, jedoch lässt sich eine obere Schranke für zusätzliche Kosten zeigen.

Zunächst werde ich für die beiden möglichen Fälle zwei Zyklen zu verbinden zeigen, dass die Kosten hier beschränkt und diese Verbindungen immer möglich sind. Der erste Fall ist der, in dem sich zwei Zyklen kreuzen. Hier ist mindestens eine Zelle in beiden Zyklen vorhanden.

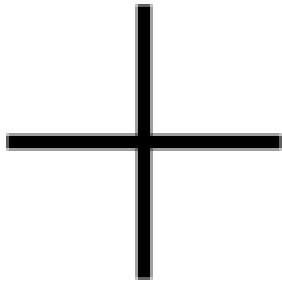
Lemma 6 *Seien P_1, P_2 zwei sich kreuzende Zyklen mit t_1, t_2 Turns und sei p eine Zelle in beiden Zyklen. Dann gibt es einen Zyklus der den selben Bereich überdeckt wie die gegebenen Zyklen mit maximalen Kosten von $t_1 + t_2 + 2$. Dieser Zyklus kann in Linearzeit in der Anzahl der Turns gefunden werden.*

Beweis. Seien a_1, a_2 Nachbarn von p in P_1 und seien b_1, b_2 Nachbarn von p in P_2 , dann lassen sich die Zyklen derart verbinden, dass a_1 über p mit b_1 verbunden wird, sowie analog a_2 über p mit b_2 (Abbildung 5). Hierbei entstehen maximal zwei neue Turns und somit wären die Kosten gezeigt. \square

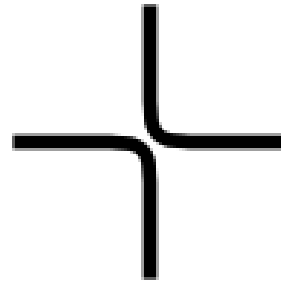
Der zweite Fall, der auftreten kann, ist dass sich zwei Zyklen berühren, dies bedeutet, dass sich die Zyklen nicht kreuzen, jedoch mindestens eine Zelle jedes Zyklus direkter Nachbar einer Zelle des anderen Zyklus ist.

Lemma 7 *Seien P_1, P_2 zwei sich berührende Zyklen mit Turnkosten t_1, t_2 . Dann lässt sich ein Zyklus finden, der mit maximalen Kosten von $t_1 + t_2 + 2$ die selbe Region überdeckt wie die Zyklen P_1, P_2 .*

Beweis. Sei a eine Zelle in P_1 und b eine Zelle in P_2 mit Abstand 1 zu a (also eine benachbarte Zelle). Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit sei b die linkeste Zelle mit dieser Eigenschaft und liege unter a . Dadurch ist b eine Ecke von P_2 und kann nur von unten oder rechts betreten werden. Je nach Beschaffenheit von P_2 kommen nun drei Fälle für den Verlauf des Zyklus durch diese Zelle in Frage, die in Abbildung 6 dargestellt sind.



(a) Zwei Kanten von verschiedenen Zyklen kreuzen sich



(b) Mit zwei zusätzlichen Turns lassen sich diese Zyklen verbinden

Abbildung 5: Durch das Verbinden von Zyklen entstehen nur konstante Zusatzkosten

Für jeden dieser drei Fälle gibt es jetzt eine Möglichkeit den Zyklus derart zu verlängern, dass durch zwei zusätzliche Turns in a die beiden Zyklen zu einem verbunden werden können. In P_2 entstehen keine neuen Kosten, da höchstens bestehende Turns umgedreht werden um die Verbindung herzustellen (Abbildung 6). \square

Da also für jede mögliche Verbindung zweier Zyklen nur zusätzliche Kosten von 2 entstehen können und eine Zyklusüberdeckung gegeben ist, also immer berührende oder kreuzende Zyklen gefunden werden können, lässt sich nun eine obere Schranke für die Gesamtüberdeckungstour finden, die durch wiederholtes Anwenden von Lemma 6 und Lemma 7 entsteht.

Theorem 8 *Eine Zyklusüberdeckung mit c Zyklen und Gesamtkosten von t Turns lässt sich in eine Überdeckungstour mit maximalen Kosten $t+2(c-1)$ überführen.*

Beweis. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Zyklen. Für $c = 1$ folgt die Behauptung sofort, da der Zyklus bereits eine Überdeckungstour darstellt und Gesamtkosten $t \leq t + 2(1 - 1) = t$ hat.

Für den Induktionsschritt $(c - 1) \rightarrow c$ hat die Tour nach Induktionsannahme maximal Kosten von $t' + 2(c - 2)$ und der neue Zyklus hat Kosten von r . Da das betrachtete Polygon durch diese beiden Zyklen komplett überdeckt wird, müssen diese sich somit entweder kreuzen oder berühren. Somit lassen sich diese nach Lemma 6 oder Lemma 7 verbinden. Durch das Verbinden der beiden Zyklen addieren sich die bisherigen Turnkosten und es entstehen maximal zwei neue Turns, somit ergeben sich Gesamtkosten von $t' + r + 2(c - 2) + 2 = t + 2(c - 1)$. \square

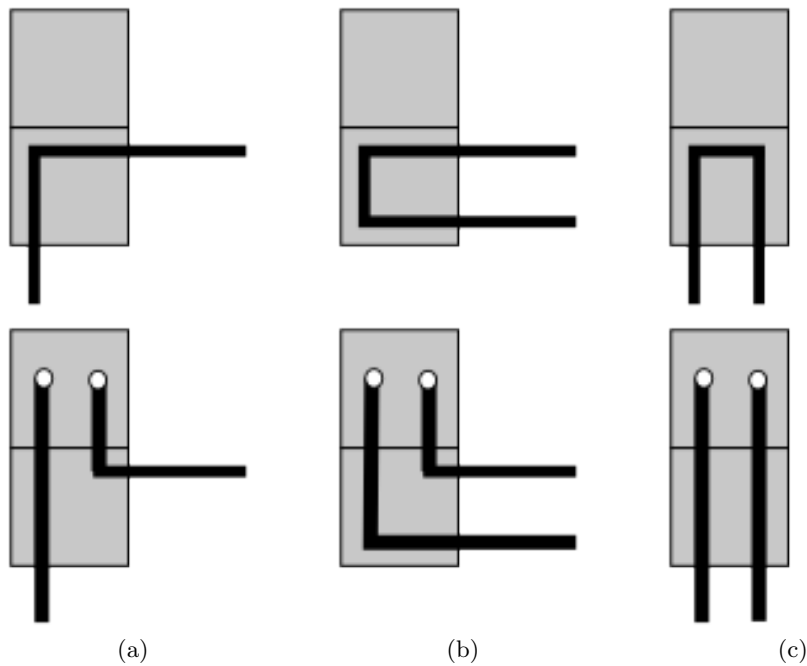


Abbildung 6: Aufgeführt sind alle Möglichkeiten einen Zyklus so zu erweitern, dass sich zwei berührende Zyklen verbinden lassen.

Für eine direkte Abschätzung der Kosten im Falle eines einfachen, rechtwinkligen Polygons lässt sich die Anzahl der Turns direkt angeben:

Korollar 9 *Eine Zyklusüberdeckung, mit t Turns, in einem einfachen, rechtwinkligen Polygon lässt sich zu einer Überdeckungstour mit maximalen Kosten von $\frac{3}{2}t$ zusammenfassen.*

Beweis. In einem einfachen, rechtwinkligem Polygon hat jeder Zyklus mindestens vier Ecken, daraus folgt $t + 2(c - 1) \leq t + 2\left(\frac{t}{4} - 1\right) = t + \frac{t}{2} - 2 \leq \frac{3}{2}t$. \square

4.1.2 Streifenüberdeckungen

Ein weiteres Hilfsmittel das in den Approximationen verwendet wird sind so genannte Streifenüberdeckungen (Abbildung 4.1.2 a). Ein Streifen ist ein Liniensegment maximaler Länge, so dass dessen Minkowskisumme mit dem Cutter innerhalb des Polygons liegt.

Eine Streifenüberdeckung eines Polygons ist somit gegeben, wenn die Minkowskisumme aller Streifen mit dem Cutter genau das Innere des Polygons ergeben. Streifenüberdeckungen werden in orthogonalen Polygonen genutzt um effizient eine Zyklusüberdeckung konstruieren zu können. Eine für die

Abschätzung der Güte von approximierten Überdeckungstouren interessante Eigenschaft dieser Überdeckung ist, dass sie eine untere Schranke für die Kosten optimaler Touren angibt.

Lemma 10 *Die Anzahl der Streifen in einer minimalen Streifenüberdeckung ist eine untere Schranke für die Anzahl der Turns in einer optimalen Überdeckungstour.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, dass sich jede Kante einer optimalen Überdeckungstour zu einem Streifen verlängern lässt. Da jetzt eventuell ein Bereich von mehreren Streifen abgedeckt wird kann die Anzahl der Streifen in einer minimalen Streifenüberdeckung höchstens kleiner sein als die Anzahl der Kanten in einer Überdeckungstour. Da jedoch die Zahl der Kanten genau der Zahl der Turns entspricht und die Menge der Kanten das ganze Polygon überdeckt ist die untere Schranke bewiesen. \square

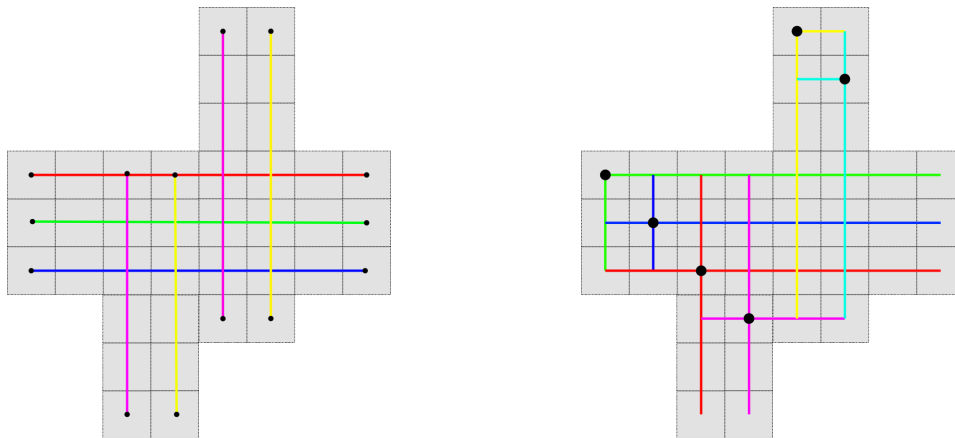
Im Falle diskreter Überdeckungstouren ist eine Turmplatzierung (Abbildung 4.1.2 b) ein ähnliches Problem wie eine Streifenüberdeckung. Wie beim Schach ist ein Turm in der Lage alle Zellen auf einem horizontalem oder vertikalem Streifen "anzugreifen". Eine Turmplatzierung besteht nun aus mehreren Türmen, die so in einem Polygon verteilt werden, dass die Türme sich paarweise nicht angreifen können. Eine maximale solche Platzierung ist gegeben, wenn sich kein weiterer Turm hinzufügen lässt, ohne dass dieser unangreifbar ist. In diesem Falle ist eine komplette Überdeckung des Polygons mit Streifen gegeben, da sich der Turm ansonsten auf ein nicht überdecktes Feld platzieren ließe.

Lemma 11 *Eine maximale Turmplatzierung ist bei einer diskreten Überdeckungstour eine untere Schranke für die Kosten einer optimalen Überdeckungstour.*

Beweis. Angenommen es gäbe eine Überdeckungstour mit weniger Turns als Türme in diesem Polygon platziert sind. Diese Überdeckungstour müsste per Definition jede Zelle des Polygons beinhalten, insbesondere auch die Zellen auf denen Türme platziert wurden. Wenn sich nun zwei Türme ohne Abbiegen des Cutters erreichen ließen, könnten sich diese Türme auch angreifen, was im Widerspruch zur gültigen Platzierung aller Türme steht. Somit muss es mindestens so viele Turns wie Türme platziert wurden geben. \square

Lemma 12 *In Gitterpolygonen ist eine optimale Streifenüberdeckung gleichmächtig mit einer maximalen Turmplatzierung und beides kann in Zeit $O(N^{2,376})$ beziehungsweise $O(n^{2,5} \log N)$ in der Anzahl N der Zellen und n der Ecken gefunden werden.*

Beweis. Für diesen Beweis wird gezeigt, dass sich die Probleme auf Matching beziehungsweise Knotenüberdeckung in einem bipartiten Graphen,



(a) Beim abfahren einer Streifenüberdeckung wird das gesamte Polygon überdeckt

(b) Eine maximale Turmplatzierung ergibt auch eine Streifenüberdeckung des Polygons

Abbildung 7: Streifenüberdeckungen und Turmplatzierungen sind nützliche Hilfsmittel um Überdeckungstouren zu konstruieren.

also einem Graphen bei dem sich die Knoten in zwei disjunkte Mengen aufteilen lassen, so dass keine Kanten innerhalb einer Menge verlaufen, zurückführen lassen.

Die vertikalen und horizontalen Streifen, die ein Turm auf einem Feld abdeckt, lassen sich als Knoten eines Graphen darstellen, diese werden genau dann mit einer Kante verbunden, wenn sich diese Streifen kreuzen. Da also nie eine Kante zwischen zwei gleich ausgerichteten Streifen entstehen kann, ist der resultierende Graph bipartit. Türme können nun so aufgestellt werden, dass nie zwei Stück auf einem Streifen stehen. Wenn somit die Kante, die die Position des Turmes repräsentiert, im Matching enthalten ist, ist eine äquivalente Formulierung, dass keine weiteren Kanten, die zu diesen Knoten führen, zum Matching hinzugefügt werden dürfen. Dies entspricht genau dem Matchingproblem in einem Graphen.

Mit dem selben Graphen kann auch für das zweite Problem argumentiert werden. Da alle Kanten des Graphen genau den Zellen des Polygons entsprechen sind und jeder Knoten einen Streifen darstellt, ist eine minimale Knotenüberdeckung im Graphen äquivalent zu einer minimalen Streifenüberdeckung des Polygons.

Für die beiden graphentheoretischen Probleme, Knotenüberdeckung und Matching, wurde die Äquivalenz durch das König-Egerváry-Theorem gezeigt. Die Laufzeit von $O(N^{2,376})$ lässt sich erreichen, indem eine Gausse-

elimination auf der Adjazienmatrix zum Graphen durchgeführt wird, bis in jeder Spalte und Zeile maximal ein Wert steht. Dies lässt sich mit schneller Matrixmultiplikation durchführen und somit ergibt sich, zum Beispiel nach [6], eine Laufzeit von $O(N^\omega)$. ω hängt hier von der verwendeten Matrixmultiplikation ab und ist zum Beispiel 2,376.

Da die Anzahl der Zellen nicht notwendigerweise in $O(n)$ liegt, wird versucht die Abhängigkeit von N zu verringern. Um nun zur Laufzeit von $O(n^{2.5} \log N)$ zu kommen, werden breite Streifen genutzt. Diese entstehen durch Zusammenfassen nebeneinanderliegender schmaler Streifen gleicher Länge. Derartige schmale Streifen verbinden jeweils die selben zwei Kanten des Polygons. Daraus folgt, dass es nur $O(n)$ breite Streifen geben kann. Nun wird wieder ein bipartiter Graph wie oben aufgebaut, jedoch nur noch mit n mit der Breite des korrespondierenden Streifens gewichteten Knoten. Die Kanten werden nun mit dem kleineren Gewicht der beiden Knoten gewichtet, damit entsprechen diese nun nicht mehr einzelnen Zellen, sondern Rechtecken, die durch den Schnitt der beiden Streifen entstehen.

Das König-Egervary-Theorem besagt für diesen Fall, dass eine Knotenüberdeckung minimalen Gewichtes gleichmächtig mit einem Matching maximalen Gewichts ist. Somit gilt auch mit dieser Modifikation das Lemma 12, das Kantengewicht des Matchings entspricht nun einer Anzahl platzierter Türme. Mit einem modifizierten Graphen kann mit einem Max-Flow-Algorithmus ein Matching bzw. eine Knotenüberdeckung in $O(\sqrt{nm} \log nW)$ bestimmt werden, hierbei ist n die Anzahl der Knoten, m die Anzahl der Kanten und W das maximale Kantengewicht. Da n^2 Kanten entstehen können und das Gesamtgewicht N nicht übersteigt ergibt sich in unserem Fall die Laufzeit von $O(n^{2.5} \log N)$. \square

4.1.3 Randüberdeckungen

Für eine der vorgestellten Approximationen ist es nötig zuerst eine Zyklusüberdeckung für die Randpixel eines Polygons zu finden.

Lemma 13 *Eine Zyklusüberdeckung mit minimalen Turnkosten lässt sich für die Menge am Rand eines Gitterpolygons liegenden Zellen in $O(N_{Rand}^3)$ Zeit bestimmen, wobei N_{Rand} die Anzahl der Randzellen bezeichnet.*

Beweis. Wir definieren als Hilfsmittel einen Pfad innerhalb dieser Zelle, der durchlaufen werden muss (Abbildung 8). Dieser eingebettete Pfad repräsentiert wie of sich der Cutter sich drehen muss, wenn er die Zelle besucht. Dieses Hilfskonstrukt ermöglicht es Turnkosten des Cutters genau dem Betreten und Verlassen der Zelle zuzuordnen. Wenn der Cutter in der Richtung des Pfades auf die Zelle trifft, kann er es ohne Kosten betreten, ansonsten fallen die Kosten an, um den Cutter korrekt auszurichten. Ebenso

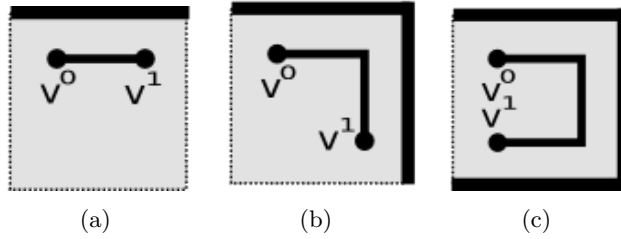


Abbildung 8: Ein eingebetteter Pfad in einem Randpixel des Polygons.

treten Kosten auf um den Cutter nach dem Verlassen der Zelle so auszurichten, dass dem weiteren Pfad gefolgt werden kann. Für das Durchqueren der Zelle treten die Kosten des eingebetteten Pfades.

Die Endpunkte v_i^0, v_i^1 des in die Zelle p_i eingebetteten Pfades fügen wir nun als Knoten in einen Graphen ein. Nun werden alle Knoten des Graphen mit gewichteten Kanten verbunden, für die Gewichte wird ein Kostenmaß d folgendermaßen definiert: $d(v_i^k, v_j^h)$ sind die Turnkosten für einen optimalen Pfad, um von v_i^k (inklusive Verlassen der Zelle) nach v_j^h (inklusive Betreten der Zelle) zu gelangen. Dieser Pfad kann für N_{Rand} Zellen für eine Zelle zu allen anderen in $O(N_{Rand} \log N_{Rand})$ berechnet werden (siehe [5]), alle derartigen Pfade sind also in $O(N_{Rand}^2 \log N_{Rand})$ zu bestimmen.

Ein perfektes Matching mit minimalem Gewicht ergibt nun, nach Zusammenfassen der Knoten v_i^0, v_i^1 , eine Zyklusüberdeckung für die gegebenen Randpunkte mit minimalen Turnkosten. Ein Matching lässt sich in Zeit $O(N_{RAND}^3)$ bestimmen (siehe zum Beispiel [4]). \square

4.2 Überdeckungstouren in Gitterpolygone

Der Cutter hat in diesem Fall die Form eines Einheitsquadrates und kann sich in 90° Schritten drehen. Jeder Turn um 90° verursacht Kosten von 1, eine Kehrtwende also Kosten von 2.

Ein dünnes orthogonales Polygon lässt sich, ohne Veränderung der Turnkosten, einfach in ein Gitterpolygon überführen, der Beweis der Komplexität lässt sich also auch auf diesen Fall übertragen und somit ist auch dieses Problem NP-hart. Für Gitterpolygone lässt sich jedoch mit einer Zeitkomplexität von $O(n \log n)$ in der Anzahl der Ecken des Polygons eine Approximation mit maximal zwölf mal so hohen Turnkosten wie eine optimale Tour angeben. Dieses Ergebnis lässt sich mit höherem Zeitaufwand noch bis auf einen Faktor unter vier verbessern.

Zuerst werde ich eine Approximation angeben, die unabhängig von der Anzahl der Zellen im Polygon ist und somit eine effiziente Kodierung als Ecken und Kanten des Polygons zulässt. Insbesondere bei Polygonen mit großen zusammenhängenden Flächen kann dies einen großen Effizienzgewinn bedeuten. Die Grundidee des Algorithmus besteht darin, dass zuerst mit einem Greedyalgorithmus eine maximale Turmplatzierung des Polygons berechnet wird und aus dieser, in einem weiteren Schritt, eine Zyklusüberdeckung und somit eine Überdeckungstour konstruiert wird. Da die Turmplatzierung aus Lemma 11 jede Zelle betrachten muss, wäre eine Laufzeit in Abhängigkeit von den Zellen notwendig. Daher werden so genannte große Türme benutzt. Ein großer Turm ist ein Quadrat mit Kantenlänge r und kann alle Zellen angreifen, die durch kleine Türme, die auf der Diagonalen des großen Turmes liegen, angreifbar sind. Durch die diagonale Anordnung können sich offensichtlich die kleinen Türme nicht untereinander angreifen und somit lässt sich aus großen Türmen eine gültige Turmplatzierung, die sich direkt auf kleine Türme überträgt, konstruieren.

Ein derartiger großer Turm der Kantenlänge r_i lässt sich nun in r_i kleine Türme zerlegen, die aus zwei sich kreuzenden orthogonalen Streifen bestehen. Ein derartiger Turm lässt sich in konstanter Zeit zu einem Zyklus mit zehn Turns umwandeln. Nach Theorem 8 lässt sich nun eine Tour für die gesamte durch den großen Turm angreifbare Fläche, mit Kosten von $10r_i + 2(r_i - 1) = 12r_i - 2$ konstruieren, in dem jeder kleine Turm durch einen Zyklus mit Kosten 10 ersetzt wird und jeweils zwei Türme mit Kosten 2 verbunden werden können. Um unabhängig von der Anzahl der Zellen zu bleiben, werden diese Zyklen und Touren nicht explizit konstruiert, sondern nur eine Tour, die alle großen besucht. Durch implizite Vorschriften wie ein großer Turm nun zu durchlaufen ist lässt sich so die Gesamttour abfahren.

Da die Anzahl der kleinen Türme nach Lemma 11 eine untere Schranke für eine optimale Überdeckungstour ist, ergibt sich nun die angegebene Approximationsgüte von 12. Das Ergebnis ist auch eine 4-Approximation der Länge einer optimalen Überdeckungstour, da jeder Turm nur von seinen korrespondierenden zwei Streifen überdeckt wird und diese in jede Richtung nur jeweils einmal durchlaufen werden, insgesamt wird jeder Turm (und somit jede Zelle) also nur viermal überdeckt.

Bleibt noch zu zeigen, dass sich diese Approximation in der erwarteten Laufzeit konstruieren lässt.

Theorem 14 *Eine 12-Approximation für die Turnkosten und 4-Approximation der Länge einer optimalen Überdeckungstour lässt sich in einem Gitterpolygon in Zeit $O(n \log n)$ konstruieren. Für den Fall, dass das Polygon keine Löcher hat lässt sich die Approximation in Linearzeit finden.*

Beweis. Die Approximationsgüte ergibt sich aus dem obigen Algorithmus. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass sich eine maximale Turmplatzierung für große Türme in der geforderten Zeit finden lässt. Hierfür ist es zunächst nötig das Ausgangspolygon in rechteckige Bereich zu zerlegen. Dies geschieht durch Aufteilung in breite vertikale sowie horizontale Streifen (Abbildungen 9 a und b). Durch die Anzahl der Ecken ist auch die Anzahl der Streifen auf n pro Achse beschränkt. Ein Bereich ist nun der Schnitt zweier orthogonaler Streifen.

Nun wird ein Bereich ausgewählt und ein großer Turm maximaler Ausdehnung in diesen Bereich platziert (Abbildung 9 c). Ein Turm maximaler Ausdehnung hat dabei die Kantenlänge $\min\{x_i, y_j\}$, wobei x_i die Breite des, diese Bereiche bildenden, vertikalen Streifens und y_j die Breite des horizontalen Streifens ist. Nun werden diese Streifen um die Kantenlänge des Turmes verkleinert, was dazu führt dass ein Streifen verschwindet (und somit auch alle Bereiche, zu denen dieser Streifen beigetragen hat). Somit werden in n Schritten ebensoviele Streifen ausgelöscht, dies führt mit der Gesamtanzahl von maximal $2n$ Streifen dazu, dass nach maximal $2n - 1$ Turmplatzierungen entweder alle horizontalen oder alle vertikalen Streifen ausgelöscht wurden und eine maximale Turmplatzierung gefunden wurde.

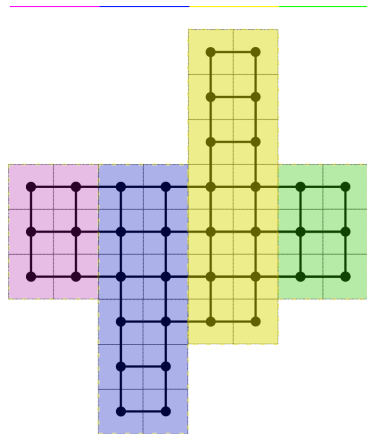
Da bis auf die Konstruktion der Bereiche alle Schritte in Linearzeit durchführbar sind, ist die Gesamtlaufzeit die Zeit, die für eine Triangulation des Polygons benötigt wird, also $O(n \log n)$ bzw. $O(n)$ im Falle eines Polygons ohne Löcher (siehe [2]). \square

Mit einer Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der in dem Polygon enthaltenen Zellen ist es möglich, die Approximationsgüte für die Turnkosten zu verdoppeln.

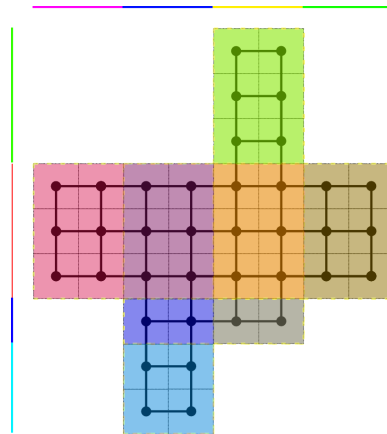
Theorem 15 *Es ist möglich in einem Gitterpolygon eine 6-Approximation einer turnkostenoptimalen Überdeckungstour in Zeit $O(N^{2,376})$ in der Anzahl der Zellen zu berechnen bzw. $O(n^{2,5} \log N)$ in der Anzahl der Ecken.*

Beweis. Nach Lemma 12 lässt sich in der angegebenen Zeit eine optimale Streifenüberdeckung für das Polygon finden. Jeder Streifen kann trivial in einen Zyklus mit Turnkosten 4 umgewandelt werden, indem man ihn in jede Richtung einmal abfährt. Nach Theorem 8 ergibt sich so eine Überdeckungstour mit Kosten $t + 2(c - 1) = 4c + 2c - 2 \leq 6c$ für c Zyklen mit insgesamt t Turns. Da die optimale Streifenüberdeckung gleichmächtig ist wie eine maximale Turmplatzierung und letztere nach Lemma 11 eine untere Schranke für die Überdeckungstour ist, ergibt sich die zu zeigende Approximation. \square

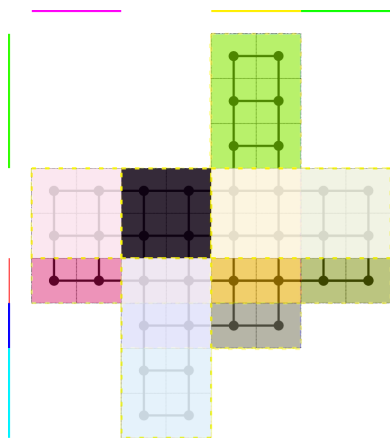
Zu beachten ist bei dieser Abschätzung, dass die Approximation sich für $N \gg n$ an eine 4-Approximation der Turnkosten annähert, da durch geschicktes Verknüpfen von Streifen die dasselbe Rechteck abdecken keine



(a) In jeder Richtung werden breite Streifen über das Polygon gelegt



(b) Durch den Schnitt horizontaler und vertikaler Streifen entstehen rechteckige Bereiche



(c) Es können Greedy große Türme platziert werden, bis das Polygon überdeckt ist

Abbildung 9: Mit großen Türmen kann eine 12-Approximation der Turnkosten in Gitterpolygonen gefunden werden.

zusätzlichen Kosten entstehen. Hierzu muss nur jeweils der Zyklus innerhalb eines Streifens an einer Seite unterbrochen und mit dem Zyklus des nächsten Streifens verbunden werden.

Ein dritter Ansatz erreicht mit einer längeren Laufzeit eine 3,75-Approximation in den Turnkosten, in dem die Zyklusbildung optimiert wird.

Theorem 16 *Es ist möglich in einem Gitterpolygon eine 3,75-Approximation der Turnkosten einer optimalen Überdeckungstour in Zeit $O(N^{2,376} + n^3)$ oder $O(n^{2,5} \log N + n^3)$ zu finden.*

Beweis. Auch in diesem Fall wird zuerst eine optimale Streifenüberdeckung gesucht, was wiederum mit $O(N^{2,376})$ bzw. $O(n^{2,5} \log N)$ Zeitkomplexität geht. Die Endpunkte der Streifen müssen, auf Grund der maximalen Länge von Streifen, auf dem Rand des Polygons liegen und werden von diesem orthogonal gekreuzt. Der Pfad muss also rechtwinklig mit Kosten von eins abknicken, es ergeben sich also minimale Kosten von 2 und die bisherige Streifenüberdeckung ist maximal doppelt so teuer wie eine minimale Überdeckungstour.

Wenn beide Richtungen zusammengefasst werden, ergibt sich eine zum Streifen orthogonale Kante. Die Endpunkte dieser Kante repräsentieren jeweils eine Ausrichtung, in der der Cutter diese Kante betreten oder verlassen kann. Für die Endpunkte wird jetzt nach Lemma 13 eine optimale Zyklusüberdeckung gesucht. Diese überdeckt bisher jedoch nur die Endpunkte mit Sicherheit, jedoch nicht das ganze Polygon. Da wir jedoch eine Tour für das gesamte Polygon suchen, muss diese Tour an den Endpunkten der Streifen jeweils in Richtung des Streifens abknicken. Das Matching M kann also in zwei disjunkte Matchings M_1, M_2 aufgeteilt werden, mit der Eigenschaft, dass diese jeweils ein Matching für die Endpunkte der Streifen mit beliebiger Ausrichtung des Cutters sind.

Da M eine optimale Zyklusüberdeckung für die Endpunkte ergibt, gilt $d(M) \leq \text{OPT}$ und somit für das bessere der beiden Teilmatchings $d(M_i) \leq \frac{\text{OPT}}{2}$. Zusammen mit den beiden Turns beim Betreten und Verlassen eines Streifens, und der Tatsache dass die Anzahl der Streifen eine untere Grenze für die Kosten einer Überdeckungstour sind, ergibt sich also eine 2,5-Approximation einer optimalen Zyklusüberdeckung. Mit Korollar 9 kommt man zu einer 3,75-Approximation einer optimalen Überdeckungstour.

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Matching auch in der geforderten Zeit konstruiert werden kann. Hierzu werden ähnlich wie im Beweis zu Theorem 14 breite Streifen genutzt. Es existieren in einer minimalen Überdeckung maximal n derartige Streifen. Innerhalb eines solchen Streifens lassen sich alle schmalen Streifen ohne extra Kosten zu einem Zyklus verbinden, in dem

jeweils die Endpunkte benachbarter Streifen verknüpft werden. Zu beachten ist, dass beim durchqueren eines solchen Streifens keine Turns notwendig sind und daher die Kostenfunktion für die Kanten des Matchings zulässig bleibt. Nach Lemma 13 lässt sich dieses Matching in $O(n^3)$ berechnen und es ergibt sich zusammen mit der Laufzeit für die Streifenüberdeckung die zu zeigende Gesamtlaufzeit. \square

Durch die Konstruktion der Zyklusüberdeckungen der Endpunkte ist keine obere Schranke für die maximale Überdeckung einer Zelle gegeben, ausser in der Anzahl der Zyklen, und daher kann auch keine Approximationsgüte der Länge angegeben werden. Es ist jedoch möglich eine gefundene Überdeckungstour so zu modifizieren, dass jede Zelle höchstens viermal überdeckt wird und somit eine 4-Approximation der Länge gegeben ist.

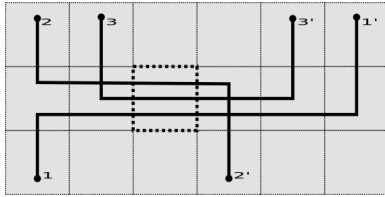
Theorem 17 *Jede gegebene Überdeckungstour, in einem Gitterpolygon, lässt sich lokal so modifizieren, dass diese Tour eine 4-Approximation der Länge einer optimalen Tour ist, ohne die Turnkosten zu erhöhen.*

Beweis. Solange eine Überdeckungstour keine 4-Approximation in der Länge ist, gibt es mindestens eine Zelle, die fünfmal oder öfter überdeckt wird. Daraus folgt, dass diese Zelle in entweder horizontaler oder vertikaler Richtung von mindestens drei Kanten der Tour überdeckt wird. Seien nun 1, 2, 3 die linken Enden von drei ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit horizontalen Segmenten (i, i') und $1', 2', 3'$ die jeweiligen rechten Enden. An diesen Punkten knickt die Tour jeweils ab zu anderen Segmenten (Abbildung 10a).

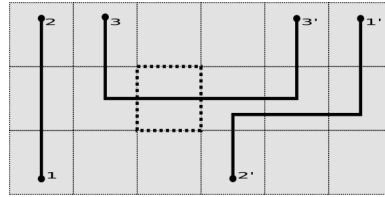
Nun kann die Tour ohne Erhöhung der Turnkosten so modifiziert werden, dass die Segmente aufgebrochen und neu verbunden werden, zum Beispiel zu $(1, 2)$, $(1', 2')$ und $(3, 3')$ (Abbildung 10b). Hierbei ist zu beachten, dass die Tour dabei nicht in zwei oder drei Zyklen zerfallen darf, jedoch ist immer eine derartige Modifikation wählbar, da bei drei Punkten, die auf jeder Seite vorliegen, immer maximal zwei zum selben Zyklus gehören und somit mindestens zwei zu verschiedenen Zyklen. Durch mehrfache Anwendung derartiger Modifikationen können alle Zellüberdeckungen größer vier eliminiert werden. \square

4.3 Überdeckungstouren in rechtwinkligen Polygonen

Gitterpolygone sind ein Spezialfall der rechtwinkligen Polygone. Wenn ein Gitterpolygon in ein rechtwinkliges Polygon eingebettet wird kann bereits ein großer Teil des Polygons mit den eben vorgestellten Approximationen abgedeckt werden. Übrig bleibt ein kleiner Teil des Polygons entlang des Randes. Dieser Bereich ist jedoch schmaler als der Cutter, da ansonsten wieder Gitterzellen eingefügt werden könnten. Hier durch ergibt sich folgendes Theorem:



(a) Drei Pfade der Überdeckungstour führen durch die selbe Zelle



(b) Durch lokale Modifikation kann diese Anzahl reduziert werden

Abbildung 10: Eine Überdeckungstour lässt sich lokal so modifizieren, dass eine 4-Approximation der Länge entsteht.

Theorem 18 *In allgemeinen rechtwinkligen Polygonen kann in Zeit $O(n^{2,5} \log N + n^3)$ eine 6,25-Approximation der Turnkosten und eine 8-Approximation der Länge einer optimalen Überdeckungstour gefunden werden.*

Beweis. In das Polygon wird ein Gitterpolygon einbettet und mit der Approximation aus Theorem 16 überdeckt. Desweiteren wird der Rand mit der Randüberdeckung aus Abschnitt 4.1.3 überdeckt. Hierbei können schmale Bereich an reflexen Ecken des Polygons unüberdeckt bleiben. Jedoch kann einer der angrenzenden Zyklen mit Kosten von 2 verlängert werden um diese Bereiche abzudecken. Diese Kosten werden zu gleichen Teilen beiden Zyklen zugeordnet. Dadurch entsteht eine Zyklusüberdeckung mit 2 OPT Turns. Alle Zyklen der Randüberdeckung können nach Korollar 9 zu einer Gesamttour mit 2,5 OPT Turns verbunden werden, da es für die Berechnung ausreicht die unmodifizierten Zyklen (ohne Überdeckung der reflexen Ecken) zu betrachten. Werden nun beide Gesamttouren verbunden entsteht so eine Tour mit 6,25 OPT Turns. Da beide Überdeckungen jeweils eine 4-Approximation der Länge sind ergibt sich insgesamt eine 8-Approximation der Länge. \square

5 Zusammenfassung

Das Problem eine optimale Überdeckungstour mit minimalen Turnkosten zu bestimmen ist, wie gezeigt wurde, ebenso wie Touren minimaler Länge zu bestimmen, ein NP-Vollständiges Problem. Jedoch ist es im Falle von Turnkosten schwerer eine Approximation zu finden, da hier im Verbinden von approximierten Überdeckungen noch zusätzliche Kosten entstehen können, dies ist bei Touren minimaler Länge nicht der Fall. Diese zusätzlichen Kosten lassen sich jedoch nach oben abschätzen und durch geschicktes Verbinden von Zyklen in Polygonen mit, im Vergleich zur Größe, geringer Komplexität auf einen kleinen Faktor reduzieren.

Für Gitterpolygone wurden einige effiziente Approximationsverfahren angegeben, die die spezielle Struktur des Problems in diesem Falle ausnutzen. Je nach benötigter Approximationsgüte, und zur Verfügung stehender Zeit, lassen sich Überdeckungstouren effizient und nur in Abhängigkeit von der Komplexität des Polygons bestimmen. Sind bessere Approximationen gefordert fließt in den aufgezeigten Approximationen immer die Größe in Zellen mit ein, jedoch lässt sich diese durch die implizite Kodierung von großen Teilen einer Tour auf einen logarithmischen Faktor begrenzen.

Ebenso wie für Gitterpolygone lassen sich Approximationen, unter Ausnutzung der Struktur, auch für andere Polygone finden, zum Beispiel für die im Beweis der NP-Vollständigkeit verwandten dünnen orthogonalen Polygone.

Literatur

- [1] E. M. Arkin, M. A. Bender, E. D. Demaine, S. P. Fekete, J. S. B. Mitchell, and S. Sethia. Optimal covering tours with turn costs. *SIAM Journal on Computing*, 35(3):531–566, 2005.
- [2] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Disc. and Comp. Geometry*, 6:485–524, 1991.
- [3] R. Klein. *Algorithmische Geometrie*. Addison-Wesley, Bonn, 1997.
- [4] B. Korte and J. Vygen. *Combinatorial Optimization*. Springer, 2002.
- [5] J. Mitchell. Geometric shortest paths and network optimization, 1998.
- [6] M. Mucha and P. Sankowski. Maximum matchings via gaussian elimination. In *FOCS '04: Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'04)*, pages 248–255, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.